Cinématique du point en mécanique newtonienne

Julien Cubizolles

Lycée Louis le Grand

Jeudi 7 janvier 2022

Cinématique du point en mécanique newtonienne

Julien Cubizolles

Lycée Louis le Grand

Jeudi 7 janvier 2022

Nature

Modèle

L'espace physique est décrit comme un ensemble de points M_i. On définit expérimentalement la distance entre deux points M_iM_j et on pose en principe que l'ensemble des M_i forme un espace euclidien de dimension 3 :

- à tout couple de points $(M_i;M_j)$, on associe un vecteur noté $\overrightarrow{M_iM_j}$: l'ensemble de ces vecteurs forme un espace vectoriel de dimension 3,
- il existe un produit scalaire dont dérive la distance définie précédemment : $M_iM_j = \sqrt{\underbrace{\overrightarrow{M_iM_j} \cdot \overrightarrow{M_iM_j}}_{\text{produit scalaire}}}$,

On nomme longueur, notée L, la dimension d'une distance dans l'espace.

Repère et base

Définition (Solide)

Un solide est un ensemble de points M_i dont les distances deux à deux sont stationnaires : $M_iM_j = cste$ en fonction du temps.

Repère et base

Définition (Repère)

Un repère de l'espace est constitué d'un point O, nommé origine du repère et d'une base $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de l'espace vectoriel liés à un solide $\mathscr{S}$ dit de référence.
La position d'un point M dans le repère $(O, \mathscr{B})$ est donnée par ses coordonnées x_1, x_2, x_3 telles que :

$$\overrightarrow{OM} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + x_3\vec{e_3}.$$

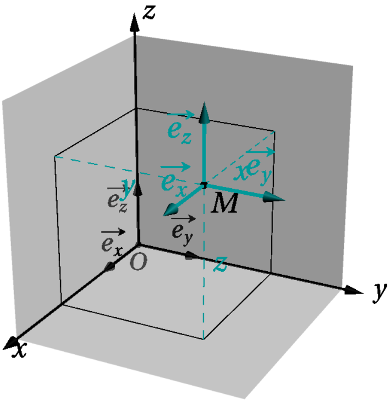
On utilisera des bases orthonormées directes dont les vecteurs :

sont normés $|\vec{e_i}| = 1$ sans dimension,

sont 2 à 2 orthogonaux $\vec{e_i} \cdot \vec{e_j} = 0 \forall i \neq j$,

forment un trièdre direct leur orientation relative est donnée par la règle de la main droite/du tire-bouchon

Base cartésienne



- règle du tire-bouchon/ tournevis / de la main droite (ou gauche) pour reconnaître un trièdre direct
- exemple de solide de référence : la classe (un coin de mur donne une origine et trois directions)

Notation d'un vecteur

$$\vec{A} = A_1\vec{e_1} + A_2\vec{e_2} + A_3\vec{e_3} \qquad A = |\vec{A}|.$$

- $A \geqslant 0$ est la norme de $\vec{A}$,

Notation d'un vecteur

$$\vec{A} = A_1 \vec{e_1} + A_2 \vec{e_2} + A_3 \vec{e_3} \qquad A = |\vec{A}|.$$

- $A \geqslant 0$ est la norme de $\vec{A}$,
- $A_{1,2,3} \lesseqgtr 0$ ses composantes sur la base $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$.

Notation d'un vecteur

$$\vec{A} = A_1\vec{e_1} + A_2\vec{e_2} + A_3\vec{e_3} \qquad A = |\vec{A}|.$$

- $A \geqslant 0$ est la norme de $\vec{A}$,
- $A_{1,2,3} \lesseqgtr 0$ ses composantes sur la base $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$.
- $\vec{A}, A, A_{1,2,3}$ ont même dimension, $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ sont sans dimension.

Unité légale de longueur : le mètre

Jusqu'à la fin de l'Ancien Régime : nombreuses définitions locales.

Unité légale de longueur : le mètre

1791

$\frac{1}{4\cdot 10^7}$ du méridien terrestre : mesure difficile mais universel. Exemplaires publics (36 rue Vaugirard, 13 place Vendôme).

Unité légale de longueur : le mètre

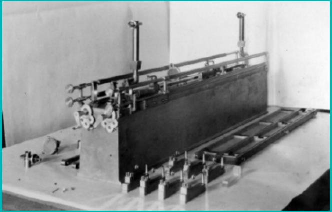
1799

Étalon en platine-iridium : un unique objet à reproduire

Unité légale de longueur : le mètre

1960

$165075,73$ longueurs d'ondes d'une transition de ^{86}Kr : universel de nouveau, mesures très précises.



Unité légale de longueur : le mètre

Définition (du mètre depuis 1983)

L'unité légale de longueur est le mètre, de symbole m, défini comme la distance parcourue par la lumière dans le vide en $\frac{1}{299\,792\,458}$ s.

Unité légale de longueur : le mètre

Définition (du mètre depuis 1983)

L'unité légale de longueur est le mètre, de symbole m, défini comme la distance parcourue par la lumière dans le vide en $\dfrac{1}{299\,792\,458}$ s.

Unité légale de longueur : le mètre

Définition (du mètre depuis 1983)

L'unité légale de longueur est le mètre, de symbole m, défini comme la distance parcourue par la lumière dans le vide en $\frac{1}{299\,792\,458}$ s.

- $c = 299\,792\,458\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ par définition du mètre

Unité légale de longueur : le mètre

Définition (du mètre depuis 1983)

L'unité légale de longueur est le mètre, de symbole m, défini comme la distance parcourue par la lumière dans le vide en $\frac{1}{299\,792\,458}$ s.

- $c = 299\,792\,458\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ par définition du mètre
- une distance c'est un temps.

Nature et mesure

Définition (Durée)

On définit expérimentalement la durée entre deux instants au moyen d'une horloge dans laquelle se reproduit périodiquement le même phénomène.
Pour repérer l'instant d'un phénomène physique, on utilise une échelle de temps définie par une origine des temps et orientée dans le sens des temps croissants.

Nature et mesure

Définition (Durée)

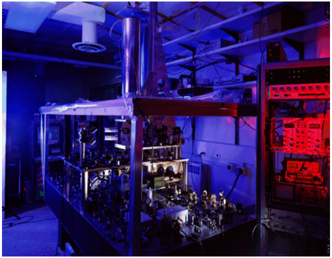
On définit expérimentalement la durée entre deux instants au moyen d'une horloge dans laquelle se reproduit périodiquement le même phénomène.
Pour repérer l'instant d'un phénomène physique, on utilise une échelle de temps définie par une origine des temps et orientée dans le sens des temps croissants.

- fondé sur le postulat d'un écoulement uniforme : un phénomène prendra toujours le même temps pour se répéter.
- cadrans solaires, pendule, oscillations électroniques…

Unité légale

Définition (Seconde)

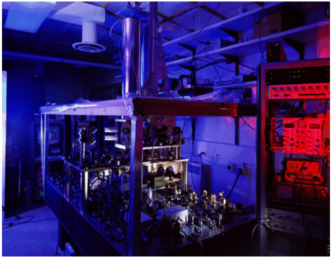
L'unité légale de durée est la seconde, de symbole s, définie comme la durée de 9192631770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium ^{133}Cs.



Unité légale

Définition (Seconde)

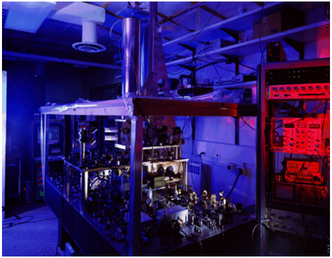
L'unité légale de durée est la seconde, de symbole s, définie comme la durée de 9192631770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium ^{133}Cs.



Unité légale

Définition (Seconde)

L'unité légale de durée est la seconde, de symbole s, définie comme la durée de 9192631770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium ^{133}Cs.

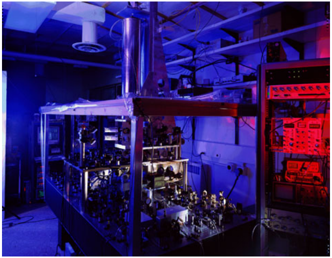


- entre deux niveaux d'énergie E_1 et E_2 de Cs, émission et absorption de photons de fréquence $\nu = |E_2 - E_1|/h$ (constante de Planck $h = 6{,}626\,070\,15 \cdot 10^{-34}$ J·s).

Unité légale

Définition (Seconde)

L'unité légale de durée est la seconde, de symbole s, définie comme la durée de 9192631770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium ^{133}Cs.



- entre deux niveaux d'énergie E_1 et E_2 de Cs, émission et absorption de photons de fréquence $\nu = |E_2 - E_1|/h$ (constante de Planck $h = 6{,}626\,070\,15 \cdot 10^{-34}$ J·s).
- précision relative : $\simeq 1 \cdot 10^{-15}$, *ie* une seconde tous les 30 millions d'années.

Référentiel et temps absolu

Définition (Référentiel)

Un référentiel $\mathscr{R}$ est constitué d'un solide de référence et d'une horloge. Un repère lié au solide de référence est nommé repère cartésien attaché à $\mathscr{R}$. On choisit trois vecteurs $\vec{e_x}$,$\vec{e_y}$ et $\vec{e_z}$ formant une base orthonormée directe et O un point fixe du repère, qu'on notera alors $\left(O,\vec{e_x},\vec{e_y},\vec{e_z}\right)$.

Référentiel et temps absolu

Définition (Référentiel)

Un référentiel $\mathscr{R}$ est constitué d'un solide de référence et d'une horloge. Un repère lié au solide de référence est nommé repère cartésien attaché à $\mathscr{R}$. On choisit trois vecteurs $\vec{e_x}, \vec{e_y}$ et $\vec{e_z}$ formant une base orthonormée directe et O un point fixe du repère, qu'on notera alors $(O, \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$.

- $(O, \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$ fixes dans $\mathscr{R}$ par définition
- ☠ il existe des repères mobiles dans $\mathscr{R}$

Référentiel et temps absolu

Définition (Référentiel)

Un référentiel $\mathscr{R}$ est constitué d'un solide de référence et d'une horloge. Un repère lié au solide de référence est nommé repère cartésien attaché à $\mathscr{R}$. On choisit trois vecteurs $\vec{e_x}, \vec{e_y}$ et $\vec{e_z}$ formant une base orthonormée directe et O un point fixe du repère, qu'on notera alors $(O, \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$.

Principe du temps absolu

Le temps est absolu : il s'écoule de la même manière dans tous les référentiels en mécanique newtonienne.

Référentiel et temps absolu

Définition (Référentiel)

Un référentiel $\mathscr{R}$ est constitué d'un solide de référence et d'une horloge. Un repère lié au solide de référence est nommé repère cartésien attaché à $\mathscr{R}$. On choisit trois vecteurs $\vec{e_x}, \vec{e_y}$ et $\vec{e_z}$ formant une base orthonormée directe et O un point fixe du repère, qu'on notera alors $(O, \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$.

Principe du temps absolu

Le temps est absolu : il s'écoule de la même manière dans tous les référentiels en mécanique newtonienne.

Référentiel et temps absolu

Définition (Référentiel)

Un référentiel $\mathscr{R}$ est constitué d'un solide de référence et d'une horloge. Un repère lié au solide de référence est nommé repère cartésien attaché à $\mathscr{R}$. On choisit trois vecteurs $\vec{e_x}, \vec{e_y}$ et $\vec{e_z}$ formant une base orthonormée directe et O un point fixe du repère, qu'on notera alors $(O, \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$.

Principe du temps absolu

Le temps est absolu : il s'écoule de la même manière dans tous les référentiels en mécanique newtonienne.

- référentiel : la classe (repère) munie d'une horloge

Référentiel et temps absolu

Définition (Référentiel)

Un référentiel $\mathscr{R}$ est constitué d'un solide de référence et d'une horloge. Un repère lié au solide de référence est nommé repère cartésien attaché à $\mathscr{R}$. On choisit trois vecteurs $\vec{e_x}, \vec{e_y}$ et $\vec{e_z}$ formant une base orthonormée directe et O un point fixe du repère, qu'on notera alors $(O, \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$.

Principe du temps absolu

Le temps est absolu : il s'écoule de la même manière dans tous les référentiels en mécanique newtonienne.

- référentiel : la classe (repère) munie d'une horloge
- temps absolu : une horloge sur le quai de la gare et dans le train battent à la même vitesse

Trajectoire

Définition (Trajectoire)

Soit $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ un repère. La trajectoire dans ce repère d'un point M est la courbe de l'ensemble des positions (x_1, x_2, x_3) de M au cours du temps.
On peut la caractériser au moyen de deux équation $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ et $g(x_1, x_2, x_3) = 0$ vérifiées simultanément par les coordonnées x_1, x_2, x_3.

Trajectoire

Définition (Trajectoire)

Soit $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ un repère. La trajectoire dans ce repère d'un point M est la courbe de l'ensemble des positions (x_1, x_2, x_3) de M au cours du temps.
On peut la caractériser au moyen de deux équation $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ et $g(x_1, x_2, x_3) = 0$ vérifiées simultanément par les coordonnées x_1, x_2, x_3.

Trajectoire

Définition (Trajectoire)

Soit $(O,\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$ un repère. La trajectoire dans ce repère d'un point M est la courbe de l'ensemble des positions (x_1,x_2,x_3) de M au cours du temps.
On peut la caractériser au moyen de deux équation $f(x_1,x_2,x_3)=0$ et $g(x_1,x_2,x_3)=0$ vérifiées simultanément par les coordonnées x_1,x_2,x_3.

- point au sens géométrique : pas de réalité physique.

Trajectoire

Définition (Trajectoire)

Soit $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ un repère. La trajectoire dans ce repère d'un point M est la courbe de l'ensemble des positions (x_1, x_2, x_3) de M au cours du temps.
On peut la caractériser au moyen de deux équation $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ et $g(x_1, x_2, x_3) = 0$ vérifiées simultanément par les coordonnées x_1, x_2, x_3.

- point au sens géométrique : pas de réalité physique.
- trajectoire = courbe : plusieurs mouvements peuvent avoir la même trajectoire (1^{er}et dernier d'un marathon).

Exemples

Trajectoire rectiligne plane

$$\alpha_x x + \beta_y y = \beta \quad \text{et : } z = 0$$

Trajectoire circulaire plane

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1 \quad \text{et : } z = 0$$

Équations du mouvement

Définition (Équations du mouvement)

Soit $\mathscr{R}$ un référentiel muni d'un repère $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ quelconque et M un point en mouvement dans $\mathscr{R}$.

- L'équation $\overrightarrow{OM} = \vec{H}(t)$ est l'équation paramétrique du mouvement.
- Les équations $x_1 = h_1(t)$, $x_2 = h_2(t)$, $x_3 = h_3(t)$ sont les équations paramétriques du mouvement.

Équations du mouvement

Définition (Équations du mouvement)

Soit $\mathscr{R}$ un référentiel muni d'un repère $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ quelconque et M un point en mouvement dans $\mathscr{R}$.

- L'équation $\overrightarrow{OM} = \vec{H}(t)$ est l'équation paramétrique du mouvement.
- Les équations $x_1 = h_1(t)$, $x_2 = h_2(t)$, $x_3 = h_3(t)$ sont les équations paramétriques du mouvement.

☠ $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ pas nécessairement fixes dans $\mathscr{R}$.

Équations du mouvement

Définition (Équations du mouvement)

Soit $\mathscr{R}$ un référentiel muni d'un repère $(O,\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$ quelconque et M un point en mouvement dans $\mathscr{R}$.

- L'équation $\overrightarrow{OM} = \vec{H}(t)$ est l'équation paramétrique du mouvement.
- Les équations $x_1 = h_1(t)$, $x_2 = h_2(t)$, $x_3 = h_3(t)$ sont les équations paramétriques du mouvement.

Équations du mouvement

Définition (Équations du mouvement)

Soit $\mathscr{R}$ un référentiel muni d'un repère $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ quelconque et M un point en mouvement dans $\mathscr{R}$.

- L'équation $\overrightarrow{OM} = \vec{H}(t)$ est l'équation paramétrique du mouvement.
- Les équations $x_1 = h_1(t)$, $x_2 = h_2(t)$, $x_3 = h_3(t)$ sont les équations paramétriques du mouvement.

- $\overrightarrow{OM} = v_x t \vec{e_x} + v_y t \vec{e_y}$, avec $x = v_x t$ et $y = v_y t$

Équations du mouvement

Définition (Équations du mouvement)

Soit $\mathscr{R}$ un référentiel muni d'un repère $(O,\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$ quelconque et M un point en mouvement dans $\mathscr{R}$.

- L'équation $\overrightarrow{OM} = \vec{H}(t)$ est l'équation paramétrique du mouvement.
- Les équations $x_1 = h_1(t)$, $x_2 = h_2(t)$, $x_3 = h_3(t)$ sont les équations paramétriques du mouvement.

- $\overrightarrow{OM} = v_x t\vec{e_x} + v_y t\vec{e_y}$, avec $x = v_x t$ et $y = v_y t$
- $\overrightarrow{OM} = R\cos(\omega t)\vec{e_x} + R\sin(\omega t)\vec{e_y}$, avec $x = R\cos(\omega t)$; $y = R\sin(\omega t)$

Vecteurs position et vitesse

Définition (Vecteurs position et vitesse)

Soit M un point et $\mathscr{R}$ un référentiel dont O est un point fixe quelconque.
On nomme vecteur position de M dans $\mathscr{R}$ le vecteur $\overrightarrow{OM}$.
Le vecteur vitesse, ou vitesse de M dans $\mathscr{R}$ à l'instant t, noté $\vec{v}_{\mathscr{R}}$, est la dérivée temporelle, par rapport à $\mathscr{R}$, du vecteur position à l'instant t :

$$\vec{v}_{\mathscr{R}} = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathscr{R}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{OM}(t+\Delta t) - \overrightarrow{OM}(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{M(t)M(t+\Delta t)}}{\Delta t} \quad \text{aussi noté : } \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathscr{R}}.$$

Il est tangent à la trajectoire au point $M(t)$.

Vecteur accélération

Définition (Vecteur accélération)

Le vecteur accélération, ou accélération de M dans $\mathscr{R}$ à l'instant t, noté $\vec{a}_{\mathscr{R}}$, est la dérivée temporelle, par rapport à $\mathscr{R}$, du vecteur vitesse à l'instant t :

$$\vec{a}_{\mathscr{R}} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{\mathscr{R}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathscr{R}} = \left(\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}\right)_{\mathscr{R}}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}_{\mathscr{R}}(t+\Delta t) - \vec{v}_{\mathscr{R}}(t)}{\Delta t} \quad \text{aussi noté : } \left(\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t^2}\right)_{\mathscr{R}}.$$

Vecteur accélération

Définition (Vecteur accélération)

Le vecteur accélération, ou accélération de M dans $\mathscr{R}$ à l'instant t, noté $\vec{a}_{\mathscr{R}}$, est la dérivée temporelle, par rapport à $\mathscr{R}$, du vecteur vitesse à l'instant t :

$$\vec{a}_{\mathscr{R}} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{\mathscr{R}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathscr{R}} = \left(\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}\right)_{\mathscr{R}}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}_{\mathscr{R}}(t+\Delta t) - \vec{v}_{\mathscr{R}}(t)}{\Delta t} \quad \text{aussi noté : } \left(\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t^2}\right)_{\mathscr{R}}.$$

comme on ne considérera qu'un référentiel cette année on omettra l'indice $\mathscr{R}$

Vitesse relative

Définition (Vitesse relative)

Les vitesses dans un référentiel $\mathscr{R}$ de deux points A et B vérifient :

$$\vec{v}_{\mathscr{R}}(B) - \vec{v}_{\mathscr{R}}(A) = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{AB}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathscr{R}}.$$

Vitesse relative

Définition (Vitesse relative)

Les vitesses dans un référentiel $\mathscr{R}$ de deux points A et B vérifient :

$$\vec{v}_{\mathscr{R}}(B) - \vec{v}_{\mathscr{R}}(A) = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{AB}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathscr{R}}.$$

- $\vec{v}_{\mathscr{R}}(B) - \vec{v}_{\mathscr{R}}(A)$ est la vitesse relative de B par rapport à A dans $\mathscr{R}$ le référentiel
- une voiture A roulant à $130\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ doublant une voiture roulant à $120\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$: $|\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{AB}}{\mathrm{d}t}| = 10\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$

Relativité du mouvement

Le mouvement d'un point dépend du référentiel d'observation.

Relativité du mouvement

Le mouvement d'un point dépend du référentiel d'observation.

une montagne est :

Relativité du mouvement

Le mouvement d'un point dépend du référentiel d'observation.

une montagne est :

- immobile dans un référentiel lié à la Terre

Relativité du mouvement

Le mouvement d'un point dépend du référentiel d'observation.

une montagne est :

- immobile dans un référentiel lié à la Terre
- en mouvement dans celui d'une caméra liée à la tête d'un skieur

Définition (Trajectoire dans l'espace des phases)

Pour un mouvement unidimensionnel selon l'axe cartésien Ox d'un référentiel $\mathscr{R}$, la trajectoire dans l'espace des phases d'un point M de position $x(t)$ et de vitesse $v_x = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ est l'ensemble des points de coordonnées $(x(t), v_x(t))$.

Définition (Trajectoire dans l'espace des phases)

Pour un mouvement unidimensionnel selon l'axe cartésien Ox d'un référentiel $\mathscr{R}$, la trajectoire dans l'espace des phases d'un point M de position $x(t)$ et de vitesse $v_x = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ est l'ensemble des points de coordonnées $(x(t), v_x(t))$.

Caractéristiques

Définition (Trajectoire dans l'espace des phases)

Pour un mouvement unidimensionnel selon l'axe cartésien Ox d'un référentiel $\mathscr{R}$, la trajectoire dans l'espace des phases d'un point M de position $x(t)$ et de vitesse $v_x = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ est l'ensemble des points de coordonnées $(x(t), v_x(t))$.

Caractéristiques

- la trajectoire dans l'espace des phases est parcourue dans le sens horaire.

Définition (Trajectoire dans l'espace des phases)

Pour un mouvement unidimensionnel selon l'axe cartésien Ox d'un référentiel $\mathscr{R}$, la trajectoire dans l'espace des phases d'un point M de position $x(t)$ et de vitesse $v_x = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ est l'ensemble des points de coordonnées $(x(t), v_x(t))$.

Caractéristiques

- la trajectoire dans l'espace des phases est parcourue dans le sens horaire.
- elle intersecte l'axe $v_x = 0$ orthogonalement (si l'accélération a_x est alors non nulle).

Définition (Trajectoire dans l'espace des phases)

Pour un mouvement unidimensionnel selon l'axe cartésien Ox d'un référentiel $\mathscr{R}$, la trajectoire dans l'espace des phases d'un point M de position $x(t)$ et de vitesse $v_x = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ est l'ensemble des points de coordonnées $(x(t), v_x(t))$.

Caractéristiques

- la trajectoire dans l'espace des phases est parcourue dans le sens horaire.
- elle intersecte l'axe $v_x = 0$ orthogonalement (si l'accélération a_x est alors non nulle).
- pour un mouvement à n dimensions, elle peut être définie dans un espace à $2n$ dimensions mais est difficile à représenter

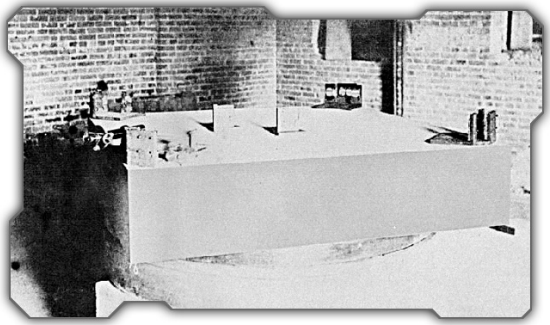
Relativité restreinte

Relativité restreinte

- en mécanique newtonienne, les vitesses s'ajoutent.

Relativité restreinte

- en mécanique newtonienne, les vitesses s'ajoutent.
- Michelson et Morley montrent en 1887 que la vitesse de la lumière est la même qu'elle soit « entraînée » par la Terre ou non.



Relativité restreinte

Invariance de c (Einstein 1905)

La vitesse de la lumière dans le vide est la même dans toute une classe de référentiels dits galiléens. Elle vaut par définition $c = 299\,792\,458\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Relativité restreinte

Invariance de c (Einstein 1905)

La vitesse de la lumière dans le vide est la même dans toute une classe de référentiels dits galiléens. Elle vaut par définition $c = 299\,792\,458\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

- les référentiels galiléens sont en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres.
- la définition du mètre repose sur cette invariance de c.

Relativité restreinte

Temps et longueurs non absolus

Le temps et les longueurs ne sont plus absolus en relativité restreinte : ils dépendent du référentiel dans lequel ils sont mesurés.

Dilatation des durées La durée entre deux évènements est supérieure dans un référentiel galiléen où ces évènements se produisent en des lieux différents à ce qu'elle est dans un référentiel galiléen où ils se produisent au même lieu.

Contraction des longueurs La distance entre les lieux où se produisent deux évènements est inférieure dans un référentiel galiléen où ces évènements ne sont pas simultanés à ce qu'elle est dans un référentiel galiléen où ils sont simultanés.

Relativité restreinte

Temps et longueurs non absolus

Le temps et les longueurs ne sont plus absolus en relativité restreinte : ils dépendent du référentiel dans lequel ils sont mesurés.

Dilatation des durées La durée entre deux évènements est supérieure dans un référentiel galiléen où ces évènements se produisent en des lieux différents à ce qu'elle est dans un référentiel galiléen où ils se produisent au même lieu.

Contraction des longueurs La distance entre les lieux où se produisent deux évènements est inférieure dans un référentiel galiléen où ces évènements ne sont pas simultanés à ce qu'elle est dans un référentiel galiléen où ils sont simultanés.

Le temps non absolu devient une coordonnée : espace-temps à 4 dimensions

Relativité restreinte

Le temps non absolu devient une coordonnée : espace-temps à 4 dimensions.

- des muons de durée de vie $2\,\mu s$ parviennent à la surface après une traversée de l'atmosphère de $2 \cdot 10^{-4}\,s$

Relativité restreinte

Le temps non absolu devient une coordonnée : espace-temps à 4 dimensions.

- des muons de durée de vie $2\,\mu s$ parviennent à la surface après une traversée de l'atmosphère de $2 \cdot 10^{-4}\,s$
- déformation d'ions lourds en mouvement relativiste.

Relativité générale (Einstein 1915)

Espace-temps non euclidien

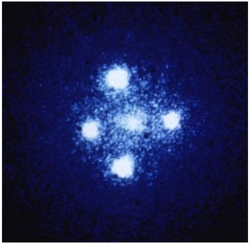
En relativité générale, l'interaction gravitationnelle est décrite en faisant intervenir un espace-temps non euclidien, déformé par les masses.
En particulier, la lumière ne se propage pas en ligne droite dans le vide en présence d'objets massifs.

Relativité générale (Einstein 1915)

Espace-temps non euclidien

En relativité générale, l'interaction gravitationnelle est décrite en faisant intervenir un espace-temps non euclidien, déformé par les masses.
En particulier, la lumière ne se propage pas en ligne droite dans le vide en présence d'objets massifs.

- « Lentilles gravitationnelles » créées par des objets célestes (trous noirs, galaxies).
- Croix d'Einstein : 4 images d'un quasar par effet de lentille d'une galaxie.



Dualité onde-corpuscule

Dualité onde-corpuscule

Tout objet physique présente à la fois des caractéristiques corpusculaires et ondulatoires.

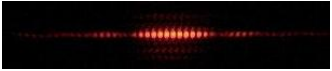
Dualité onde-corpuscule

Dualité onde-corpuscule

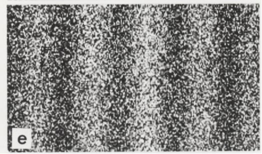
Tout objet physique présente à la fois des caractéristiques corpusculaires et ondulatoires.

corpusculaire quantité de mouvement, énergie : point matériel et photon

ondulatoire interférences, diffraction : expérience des fentes d'Young similaires pour ondes de matière et électromagnétiques



Lumière



Atomes

Délocalisation

Longueur d'onde de de Broglie (1924)

La description en termes de trajectoire n'est plus pertinente en mécanique quantique. À chaque instant, une particule ne peut pas être localisée en un point ni sa vitesse être parfaitement définie ; elle est délocalisée sur une taille de l'ordre de sa longueur de de Broglie $\lambda_{dB} = h/p$, avec p sa quantité de mouvement.

Cadre de la mécanique newtonienne

Cadre de la mécanique newtonienne

La mécanique newtonienne est la limite :

de la mécanique relativiste quand les vitesses sont faibles devant celle de la lumière ($v \ll c$) et les objets éloignés des masses ($r \gg \frac{\mathcal{G}m}{c^2}$, avec $\mathcal{G} = 6{,}673\,84(80) \cdot 10^{-11}$ S · I ·).

de la mécanique quantique quand la résolution spatiale avec laquelle est observé l'objet est très grande devant λ_{dB} (on dit alors qu'on fait tendre $\hbar$ vers 0).

Coordonnées cartésiennes

Définition (Coordonnées cartésiennes)

Les composantes cartésiennes (*ie* dans un repère cartésien), des vecteurs vitesses $\vec{v}_{\mathscr{R}}$ et accélération $\vec{a}_{\mathscr{R}}$ d'un point s'expriment par simples dérivations de ses coordonnées cartésiennes :

$$\vec{v}_{\mathscr{R}} = \dot{x}\vec{e_x} + \dot{y}\vec{e_y} + \dot{z}\vec{e_z} \qquad \vec{a}_{\mathscr{R}} = \ddot{x}\vec{e_x} + \ddot{y}\vec{e_y} + \ddot{z}\vec{e_z}.$$

Coordonnées cartésiennes

Définition (Coordonnées cartésiennes)

Les composantes cartésiennes (*ie* dans un repère cartésien), des vecteurs vitesses $\vec{v}_{\mathscr{R}}$ et accélération $\vec{a}_{\mathscr{R}}$ d'un point s'expriment par simples dérivations de ses coordonnées cartésiennes :

$$\vec{v}_{\mathscr{R}} = \dot{x}\vec{e_x} + \dot{y}\vec{e_y} + \dot{z}\vec{e_z} \qquad \vec{a}_{\mathscr{R}} = \ddot{x}\vec{e_x} + \ddot{y}\vec{e_y} + \ddot{z}\vec{e_z}.$$

http:/www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Cinematique/coord_cartesiennes.php

Déplacement élémentaire

On considère un déplacement arbitraire du point M pendant $\mathrm{d}t$ infinitésimal

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}x\overrightarrow{e_x} + \mathrm{d}y\overrightarrow{e_y} + \mathrm{d}z\overrightarrow{e_z} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \dot{x}\overrightarrow{e_x} + \dot{y}\overrightarrow{e_y} + \dot{z}\overrightarrow{e_z}.$$

Construction

utiles pour les mouvements autour d'un axe fixe ; caractérisés par :

- la distance à l'axe,
- la position angulaire autour de l'axe,
- le déplacement z le long de l'axe

Construction

Orientation des angles

Dans un plan $\mathscr{P}$ défini par un vecteur normal $\vec{e_z}$, on oriente les angles θ selon la règle de la main droite (ou gauche) / du tournevis.

Construction

Orientation des angles

Dans un plan $\mathscr{P}$ défini par un vecteur normal $\vec{e_z}$, on oriente les angles θ selon la règle de la main droite (ou gauche) / du tournevis.

Coordonnées cylindriques

La position d'un point M dans un référentiel $\mathscr{R}$ est repérée en coordonnées cylindriques d'axe $\Delta = (O, \vec{e_z})$, fixe dans $\mathscr{R}$ de repère cartésien $(O, \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$:

- par sa distance $r = M_zM \geqslant 0$ à l'axe, avec M_z son projeté orthogonal sur Δ,
- par l'angle $\theta = (\vec{e_x}, \overrightarrow{M_zM})$, orienté par Δ exprimé en radians.
- par la mesure algébrique $z \gtrless 0$ telle que $\overrightarrow{OM_z} = z\vec{e_z}$.

Illustration

http:/www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Cinematique/coord_cylindriques.php

Illustration

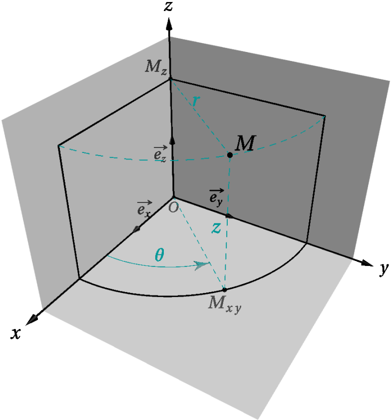
http:/www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Cinematique/coord_cylindriques.php

Lien avec les cartésiennes

Les coordonnées cylindriques et cartésiennes sont reliées par :

$$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta \quad z = z$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \tan\theta = y/x.$$



Repère mobile

Définition (Base cylindrique)

On définit la base cylindrique $(O, \vec{e_r}(\theta), \vec{e_\theta}(\theta), \vec{e_z})$ orthonormée directe liée au point $M(r, \theta, z)$. On a $\overrightarrow{OM} = r\vec{e_r} + z\vec{e_z}$.

Repère mobile

Définition (Base cylindrique)

On définit la base cylindrique $(O, \vec{e_r}(\theta), \vec{e_\theta}(\theta), \vec{e_z})$ orthonormée directe liée au point $M(r, \theta, z)$. On a $\overrightarrow{OM} = r\vec{e_r} + z\vec{e_z}$.

Déplacements élémentaires

- $\vec{e_r}$ dirige les déplacements quand seul r varie, *ie* le long du rayon passant par M (défini par $\overrightarrow{M_zM}$)
- $\vec{e_\theta}$ dirige les déplacements quand seul θ varie, *ie* le long du cercle d'axe Oz et passant par M
- $\vec{e_z}$ dirige les déplacements quand seul z varie, *ie* le long de la verticale passant par M.

Repère mobile

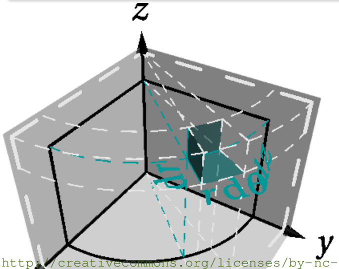
Déplacements élémentaires

- $\vec{e_r}$ dirige les déplacements quand seul r varie, *ie* le long du rayon passant par M (défini par $\overrightarrow{M_zM}$)
- $\vec{e_\theta}$ dirige les déplacements quand seul θ varie, *ie* le long du cercle d'axe Oz et passant par M
- $\vec{e_z}$ dirige les déplacements quand seul z varie, *ie* le long de la verticale passant par M.

Repère mobile

Déplacements élémentaires

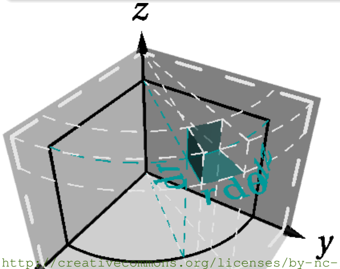
- $\vec{e_r}$ dirige les déplacements quand seul r varie, *ie* le long du rayon passant par M (défini par $\overrightarrow{M_zM}$)
- $\vec{e_\theta}$ dirige les déplacements quand seul θ varie, *ie* le long du cercle d'axe Oz et passant par M
- $\vec{e_z}$ dirige les déplacements quand seul z varie, *ie* le long de la verticale passant par M.

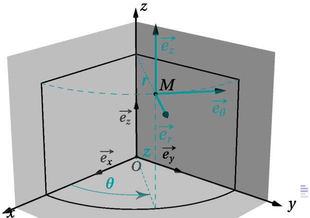


Repère mobile

Déplacements élémentaires

- $\vec{e_r}$ dirige les déplacements quand seul r varie, *ie* le long du rayon passant par M (défini par $\overrightarrow{M_zM}$)
- $\vec{e_\theta}$ dirige les déplacements quand seul θ varie, *ie* le long du cercle d'axe Oz et passant par M
- $\vec{e_z}$ dirige les déplacements quand seul z varie, *ie* le long de la verticale passant par M.





Déplacement élémentaire

Comme pour les cartésiennes :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\overrightarrow{e_r} + r\,\mathrm{d}\theta\overrightarrow{e_\theta} + \mathrm{d}z\overrightarrow{e_z} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + \dot{z}\overrightarrow{e_z}.$$

Vecteurs cinématiques

Vecteurs cinématiques

Les vecteurs $\vec{e_r}(\theta), \vec{e_\theta}(\theta)$ sont mobiles dans $\mathscr{R}$: leur direction dépend de l'angle θ repérant le point M. Ils vérifient :

- $\dfrac{\mathrm{d}\vec{e_r}(\theta)}{\mathrm{d}\theta} = \vec{e_r}(\theta + \pi/2) = \vec{e_\theta}(\theta)$, et donc $\dfrac{\mathrm{d}\vec{e_r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\vec{e_\theta}$
- $\dfrac{\mathrm{d}\vec{e_\theta}(\theta)}{\mathrm{d}\theta} = \vec{e_\theta}(\theta + \pi/2) = -\vec{e_r}(\theta)$, et donc $\dfrac{\mathrm{d}\vec{e_\theta}}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\vec{e_r}$

Les vecteurs cinématiques du point M s'y expriment selon :

- $\overrightarrow{OM} = r\vec{e_r} + z\vec{e_z}$
- $\vec{v}_{\mathscr{R}} = \underbrace{\dot{r}\vec{e_r}}_{\text{radiale}} + \underbrace{r\dot{\theta}\vec{e_\theta}}_{\text{orthoradiale}} + \underbrace{\dot{z}\vec{e_z}}_{\text{verticale}}$
- $\vec{a}_{\mathscr{R}} = \underbrace{\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{e_r}}_{\text{radiale}} + \underbrace{\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\vec{e_\theta}}_{\text{orthoradiale}} + \underbrace{\ddot{z}\vec{e_z}}_{\text{verticale}}$

Vecteurs cinématiques

- dériver par rapport à θ revient à tourner de $\pi/2$ autour de $\vec{e_z}$.
- dorénavant, on omettra (θ) pour écrire $\vec{e_r}$.

Construction

utiles pour les mouvements s'effectuant autour d'un point fixe

Construction

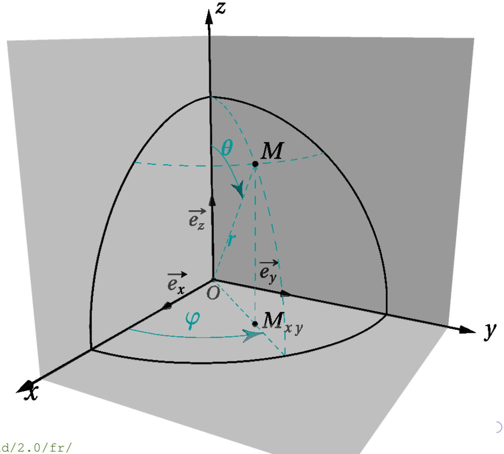
Définition (Coordonnées sphériques)

La position d'un point M dans un référentiel $\mathscr{R}$ est repérée en coordonnées sphériques d'origine O fixe dans $\mathscr{R}$ de repère cartésien $(O, \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$:

- par sa distance $r = OM \geqslant 0$ à l'origine,
- par l'angle θ, nommé colatitude ou angle zénithal, défini par $\theta = (\vec{e_z}, \vec{e_r})$. L'angle θ est compris dans l'intervalle $[0, \pi]$.
- l'angle φ, nommé longitude ou angle azimutal, défini à l'aide du projeté orthogonal de M dans le plan Oxy par $\varphi = (\vec{e_x}, \overrightarrow{OM_{xy}})$ et $\varphi \in [0, 2\pi]$. L'angle φ est orienté, dans le plan Oxy, par $\vec{e_z}$.

Illustration

http:/www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Cinematique/coord_spheriques.php



Illustration

http:/www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Cinematique/coord_spheriques.php

Lien avec les cartésiennes

Les coordonnées sphériques et cartésiennes sont reliées par :

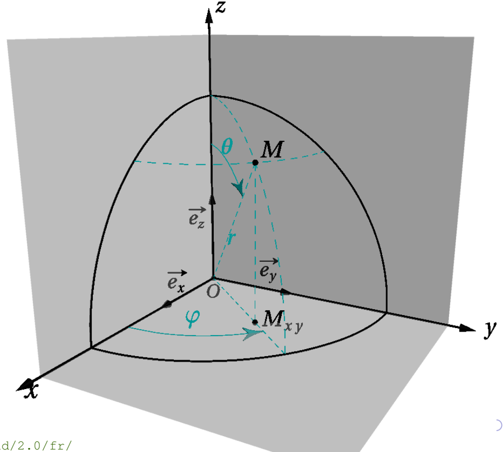
$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$

$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$

$$z = r\cos\theta$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\tan\varphi = \frac{y}{x}$$



Repère mobile

Définition (Base sphérique)

On définit la base sphérique $(O, \vec{e_r}(\theta,\varphi), \vec{e_\theta}(\theta,\varphi), \vec{e_\varphi}(\theta,\varphi))$ orthonormée directe liée au point $M(r,\theta,\varphi)$. On a $\overrightarrow{OM} = r\vec{e_r}$.

Repère mobile

Déplacements élémentaires

- $\vec{e_r}$ dirige les déplacements quand seul r varie, *ie* le long du rayon passant par (M) (défini par $\vec{e_r} = \overrightarrow{OM}.\frac{1}{r}$)
- $\vec{e_\theta}$ dirige les déplacements quand seul θ varie, *ie* le long du méridien passant par M (défini par $\vec{e_\theta} = \vec{e_\varphi} \wedge \vec{e_r}$)
- $\vec{e_\varphi}$ dirige les déplacements quand seul φ varie, *ie* le long du cercle de latitude constante passant par M (défini par $\vec{e_\varphi} = \vec{e_z} \wedge \overrightarrow{OM_z}.\frac{1}{OM_z}$)

Repère mobile

Déplacements élémentaires

- $\vec{e_r}$ dirige les déplacements quand seul r varie, *ie* le long du rayon passant par (M) (défini par $\vec{e_r} = \overrightarrow{OM}.\frac{1}{r}$)
- $\vec{e_\theta}$ dirige les déplacements quand seul θ varie, *ie* le long du méridien passant par M (défini par $\vec{e_\theta} = \vec{e_\varphi} \wedge \vec{e_r}$)
- $\vec{e_\varphi}$ dirige les déplacements quand seul φ varie, *ie* le long du cercle de latitude constante passant par M (défini par $\vec{e_\varphi} = \vec{e_z} \wedge \overrightarrow{OM_z}.\frac{1}{OM_z}$)

- $\vec{e_\theta}$ dirigé du Nord vers le Sud à la surface de la Terre
- $\vec{e_\varphi}$ dirigé d'Ouest en Est à la surface de la Terre

Repère mobile

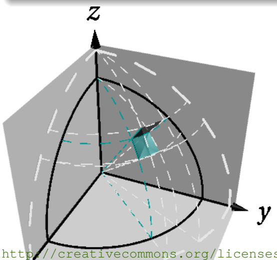
Déplacements élémentaires

- $\vec{e_r}$ dirige les déplacements quand seul r varie, *ie* le long du rayon passant par (M) (défini par $\vec{e_r} = \overrightarrow{OM}.\frac{1}{r}$)
- $\vec{e_\theta}$ dirige les déplacements quand seul θ varie, *ie* le long du méridien passant par M (défini par $\vec{e_\theta} = \vec{e_\varphi} \wedge \vec{e_r}$)
- $\vec{e_\varphi}$ dirige les déplacements quand seul φ varie, *ie* le long du cercle de latitude constante passant par M (défini par $\vec{e_\varphi} = \vec{e_z} \wedge \overrightarrow{OM_z}.\frac{1}{OM_z}$)

Repère mobile

Déplacements élémentaires

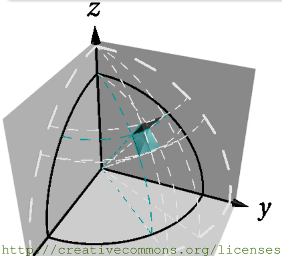
- $\vec{e_r}$ dirige les déplacements quand seul r varie, *ie* le long du rayon passant par (M) (défini par $\vec{e_r} = \overrightarrow{OM}.\frac{1}{r}$)
- $\vec{e_\theta}$ dirige les déplacements quand seul θ varie, *ie* le long du méridien passant par M (défini par $\vec{e_\theta} = \vec{e_\varphi} \wedge \vec{e_r}$)
- $\vec{e_\varphi}$ dirige les déplacements quand seul φ varie, *ie* le long du cercle de latitude constante passant par M (défini par $\vec{e_\varphi} = \vec{e_z} \wedge \overrightarrow{OM_z}.\frac{1}{OM_z}$)

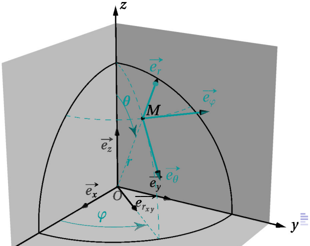


Repère mobile

Déplacements élémentaires

- $\vec{e_r}$ dirige les déplacements quand seul r varie, *ie* le long du rayon passant par (M) (défini par $\vec{e_r} = \overrightarrow{OM}.\frac{1}{r}$)
- $\vec{e_\theta}$ dirige les déplacements quand seul θ varie, *ie* le long du méridien passant par M (défini par $\vec{e_\theta} = \vec{e_\varphi} \wedge \vec{e_r}$)
- $\vec{e_\varphi}$ dirige les déplacements quand seul φ varie, *ie* le long du cercle de latitude constante passant par M (défini par $\vec{e_\varphi} = \vec{e_z} \wedge \overrightarrow{OM_z}.\frac{1}{OM_z}$)





Déplacement élémentaire

De nouveau, à partir du déplacement élémentaire :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\overrightarrow{e_r} + r\,\mathrm{d}\theta\overrightarrow{e_\theta} + r\sin(\theta)\,\mathrm{d}\varphi\overrightarrow{e_\varphi} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + r\sin(\theta)\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}.$$

Vecteurs cinématiques

Vecteurs cinématiques

Les vecteurs cinématiques du point M s'y expriment selon :

- $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r}$
- $\overrightarrow{v} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + r\sin(\theta)\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}$

Vecteurs cinématiques

Vecteurs cinématiques

Les vecteurs cinématiques du point M s'y expriment selon :

- $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r}$
- $\overrightarrow{v} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + r\sin(\theta)\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}$

- on n'aura pas besoin de l'accélération car les mouvements autour d'un point qu'on utilisera seront plans : on utilisera les coordonnées polaires
- expression complexe :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a_{\mathscr{R}}}(M) = &\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2(\theta)\right)\overrightarrow{e_r}\\ &+\left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin(\theta)\cos(\theta)\right)\overrightarrow{e_\theta}\\ &+\left(2\dot{r}\dot{\varphi}\sin(\theta) + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos(\theta) + r\ddot{\varphi}\sin(\theta)\right)\overrightarrow{e_\varphi}\end{aligned}$$

Fonctions scalaires d'une variable

- on formalise les variations élémentaires déjà utilisées

Fonctions scalaires d'une variable

- on formalise les variations élémentaires déjà utilisées
- au voisinage de x :

$$f(x+\Delta x) \simeq f(x) + f'(x)\Delta x$$

Fonctions scalaires d'une variable

- on formalise les variations élémentaires déjà utilisées
- au voisinage de x :

$$f(x+\Delta x) \simeq f(x) + f'(x)\Delta x$$

- on note $\mathrm{d}x$ quand Δx tend vers O, et $\mathrm{d}f$ l'approximation (DL) au premier ordre de $f(x+\mathrm{d}x) - f(x)$ en $\mathrm{d}x$

Fonctions scalaires d'une variable

- on formalise les variations élémentaires déjà utilisées
- au voisinage de x :

$$f(x+\Delta x) \simeq f(x) + f'(x)\Delta x$$

- on note $\mathrm{d}x$ quand Δx tend vers O, et $\mathrm{d}f$ l'approximation (DL) au premier ordre de $f(x+\mathrm{d}x) - f(x)$ en $\mathrm{d}x$
- $\mathrm{d}f$ est la différentielle de f au point (x), elle représente la variation élémentaire de f au voisinage de x

Fonctions scalaires d'une variable

- on formalise les variations élémentaires déjà utilisées
- au voisinage de x :

$$f(x+\Delta x) \simeq f(x) + f'(x)\Delta x$$

- on note $\mathrm{d}x$ quand Δx tend vers O, et $\mathrm{d}f$ l'approximation (DL) au premier ordre de $f(x+\mathrm{d}x) - f(x)$ en $\mathrm{d}x$
- $\mathrm{d}f$ est la différentielle de f au point (x), elle représente la variation élémentaire de f au voisinage de x
- on a :

$$\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Opérateur variation élémentaire

- d est un opérateur agissant sur la fonction f

Opérateur variation élémentaire

- d est un opérateur agissant sur la fonction f
- il a les mêmes propriétés que l'opérateur de dérivation :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\left(\lambda f+\mu g\right) &= \lambda\,\mathrm{d}f+\mu\,\mathrm{d}g \\
\mathrm{d}\left(fg\right) &= f\,\mathrm{d}g+g\,\mathrm{d}f \\
\mathrm{d}\left(\frac{f}{g}\right) &= \frac{\mathrm{d}f}{g}-\frac{f\,\mathrm{d}g}{g^2} \\
\mathrm{d}\left(f^n\right) &= nf^{n-1}\,\mathrm{d}f \\
\mathrm{d}\left(f\circ g\right) &= \left(f'\circ g\right)\mathrm{d}g
\end{aligned}$$

Fonctions vectorielles

on procède de la même manière ; exemple de la vitesse :

$$\overrightarrow{OM}(t+\Delta t) \simeq \overrightarrow{OM}(t) + \vec{v}(M(t))\Delta t \longrightarrow \mathrm{d}\overrightarrow{OM}(t) = \vec{v}(M(t))\,\mathrm{d}t.$$

Fonctions vectorielles

on procède de la même manière ; exemple de la vitesse :

$$\overrightarrow{OM}(t+\Delta t) \simeq \overrightarrow{OM}(t) + \vec{v}(M(t))\Delta t \longrightarrow \mathrm{d}\overrightarrow{OM}(t) = \vec{v}(M(t))\,\mathrm{d}t.$$

- on « multiplie par $\mathrm{d}t$ » l'expression de la vitesse
- on pourra noter $\mathrm{d}\overrightarrow{M}$ plutôt que $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ puisque le point O n'a pas d'importance

Fonctions de plusieurs variables

on utilise les dérivées partielles ; pour $f(x,y,z)$:

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z$$

Fonctions de plusieurs variables

on utilise les dérivées partielles ; pour $f(x,y,z)$:

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z$$

- analogue au calcul de la propagation d'erreurs
- la différentielle d'une fonction scalaire d'une variable $f(x)$ décrit les variations de l'ordonnée de la tangente à la courbe de $y = f(x)$
- pour une fonction de deux variables $f(x,y)$, la différentielle décrit les variations de l'altitude z quand on se déplace sur le plan tangent à la surface d'équation $z = f(x,y)$

Variations élémentaires en cartésiennes

On exprime les vecteurs déplacement élémentaires, surfaces élémentaires, volumes élémentaires lors de variations infinitésimales des coordonnées

Variations élémentaires en cartésiennes

Variations élémentaires en cartésiennes

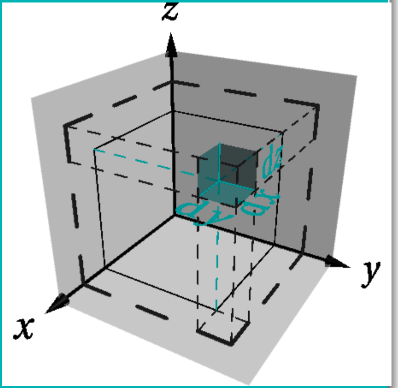
On a :

$$\mathrm{d}\vec{M} = \mathrm{d}x\vec{e_x} + \mathrm{d}y\vec{e_y} + \mathrm{d}z\vec{e_z}$$

$$\mathrm{d}S_x = \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \qquad \mathrm{d}S_y = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$$

$$\mathrm{d}S_z = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$



Variations élémentaires en cartésiennes

http:/www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Cinematique/coord_cartesiennes.php

Variations élémentaires en cylindriques

Variations élémentaires en cylindriques

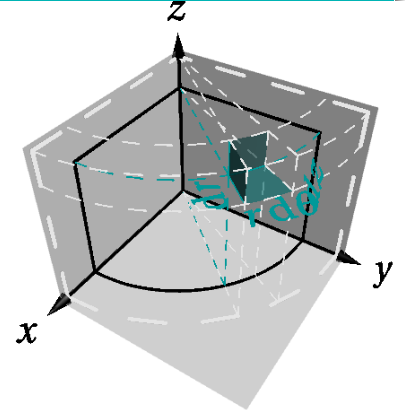
On a :

$$\mathrm{d}\vec{M} = \mathrm{d}r\vec{e_r} + r\mathrm{d}\theta\vec{e_\theta} + \mathrm{d}z\vec{e_z}$$

$$\mathrm{d}S_r = r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z \qquad \mathrm{d}S_\theta = \mathrm{d}r\,\mathrm{d}z$$

$$\mathrm{d}S_z = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}V = r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$



Variations élémentaires en cylindriques

http:/www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Cinematique/coord_cylindriques.php

Variations élémentaires en sphériques

Variations élémentaires en sphériques

On a :

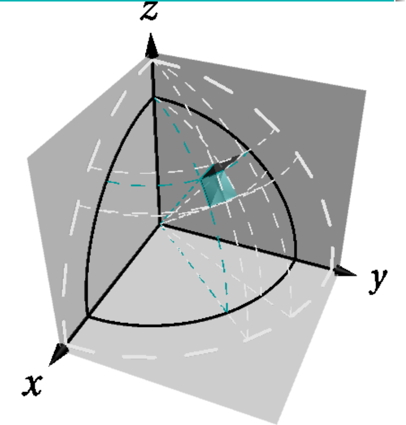
$$d\vec{M} = dr\vec{e_r} + r\,d\theta\vec{e_\theta} + r\sin\theta\,d\varphi\vec{e_\varphi}$$

$$dS_\varphi = r\,dr\,d\theta$$

$$dS_\theta = r\sin\theta\,dr\,d\varphi$$

$$dS_r = r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$$

$$dV = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$$



Variations élémentaires en sphériques

http:/www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Cinematique/coord_spheriques.php

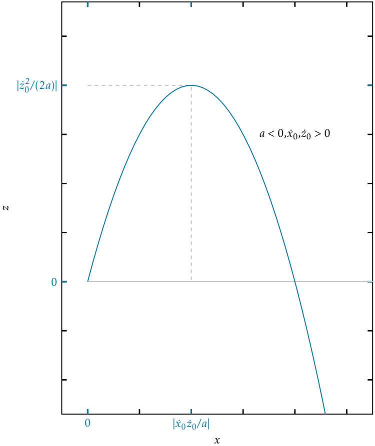
Formes des volumes élémentaires

- cartésiennes : $\mathrm{d}V$ a la forme d'une brique,
- _*cylindriques* : $\mathrm{d}V$ a la forme d'une *portion de fromage*_,
- sphériques : $\mathrm{d}V$ a la forme d'une portion de peau d'orange.

Mouvement uniformément accéléré

Mouvement uniformément accéléré

- Un mouvement d'accélération uniforme $\vec{a}_{\mathscr{R}} = a\vec{e_z}$ dans un référentiel $\mathscr{R}$, est inscrit dans le plan $(M(0), \vec{v}(0), \vec{a}_{\mathscr{R}})$.
- La trajectoire est une parabole d'axe $\propto \vec{e_z}$, de concavité tournée dans le sens opposé à $\vec{a}_{\mathscr{R}}$.
- Pour $\vec{a}_{\mathscr{R}} = \vec{0}$ le mouvement est rectiligne uniforme.



Mouvement plan circulaire

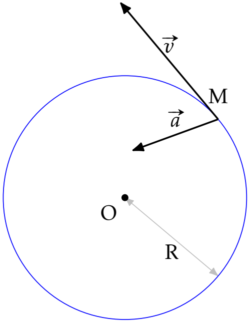
Mouvement plan circulaire

- La vitesse d'un point M animé d'un mouvement plan circulaire de rayon $R = cste$ dans $\mathscr{R}$ est orthoradiale $\vec{v}_{\mathscr{R}} = v_\theta \vec{e_\theta} = R\dot{\theta}\vec{e_\theta}$.
- L'accélération est centripète (dirigée vers le centre) et donnée par :

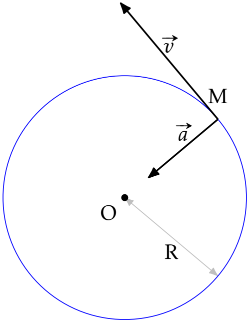
$$\vec{a}_{\mathscr{R}} = -R\dot{\theta}^2\vec{e_r} + R\ddot{\theta}\vec{e_\theta} = -\frac{v_\theta^2}{R}\vec{e_r} + \frac{\mathrm{d}v_\theta}{\mathrm{d}t}\vec{e_\theta}.$$

- Pour un mouvement circulaire uniforme de vitesse angulaire $\dot{\theta} = \omega$ stationnaire,
  - la norme de la vitesse $\vec{v}_{\mathscr{R}} = R\omega\vec{e_\theta} = v_\theta\vec{e_\theta}$ est stationnaire,
  - l'accélération $\vec{a}_{\mathscr{R}} = -R\omega^2\vec{e_r} = -\frac{v_\theta^2}{R}\vec{e_r}$ est radiale, de norme elle aussi stationnaire.

Trajectoire



Cas $v_\theta \neq cste$



Cas $v_\theta = cste$

Mouvement de trajectoire connue

- la trajectoire d'un point matériel peut être imposée : exemples
  - suivre une route tracée
  - wagon d'un train/ montagnes russes[1]
- la vitesse en chaque point dépendra de l'utilisation du système de propulsion
- déterminer l'accélération en chaque point permet de :
  - connaître la force à exercer pour assurer la vitesse choisie
  - connaître les forces ressenties par les passagers

Domaine public}

{

Mouvement de trajectoire connue

Définition (Distance élémentaire le long d'une courbe)

La distance élémentaire parcourue le long d'une courbe $\mathscr{C}$ est la norme $\left|\mathrm{d}\overrightarrow{OM}\right|$ du vecteur déplacement élémentaire.

Mouvement de trajectoire connue

Définition (Distance élémentaire le long d'une courbe)

La distance élémentaire parcourue le long d'une courbe $\mathscr{C}$ est la norme $\left|\mathrm{d}\overrightarrow{OM}\right|$ du vecteur déplacement élémentaire.

- en cartésiennes :

Mouvement de trajectoire connue

Définition (Distance élémentaire le long d'une courbe)

La distance élémentaire parcourue le long d'une courbe $\mathscr{C}$ est la norme $\left|\mathrm{d}\overrightarrow{OM}\right|$ du vecteur déplacement élémentaire.

- en cartésiennes :

Mouvement de trajectoire connue

Définition (Distance élémentaire le long d'une courbe)

La distance élémentaire parcourue le long d'une courbe $\mathscr{C}$ est la norme $\left|\mathrm{d}\overrightarrow{OM}\right|$ du vecteur déplacement élémentaire.

- en cartésiennes : $\left|\mathrm{d}x\vec{e_x} + \mathrm{d}y\vec{e_y} + \mathrm{d}z\vec{e_z}\right|$
- en cylindriques :

Mouvement de trajectoire connue

Définition (Distance élémentaire le long d'une courbe)

La distance élémentaire parcourue le long d'une courbe $\mathscr{C}$ est la norme $\left|\mathrm{d}\overrightarrow{OM}\right|$ du vecteur déplacement élémentaire.

- en cartésiennes : $\left|\mathrm{d}x\overrightarrow{e_x}+\mathrm{d}y\overrightarrow{e_y}+\mathrm{d}z\overrightarrow{e_z}\right|$
- en cylindriques : $\left|\mathrm{d}r\overrightarrow{e_r}+r\,\mathrm{d}\theta\overrightarrow{e_\theta}+\mathrm{d}z\overrightarrow{e_z}\right|$
- en sphériques :

Mouvement de trajectoire connue

Définition (Distance élémentaire le long d'une courbe)

La distance élémentaire parcourue le long d'une courbe $\mathscr{C}$ est la norme $\left|\mathrm{d}\overrightarrow{OM}\right|$ du vecteur déplacement élémentaire.

- en cartésiennes : $\left|\mathrm{d}x\overrightarrow{e_x} + \mathrm{d}y\overrightarrow{e_y} + \mathrm{d}z\overrightarrow{e_z}\right|$
- en cylindriques : $\left|\mathrm{d}r\overrightarrow{e_r} + r\,\mathrm{d}\theta\overrightarrow{e_\theta} + \mathrm{d}z\overrightarrow{e_z}\right|$
- en sphériques : $\left|\mathrm{d}r\overrightarrow{e_r} + r\,\mathrm{d}\tau\overrightarrow{e_\theta} + r\sin(\varphi)\overrightarrow{e_\varphi}\right|$
- à l'aide de la vitesse :

Mouvement de trajectoire connue

Définition (Distance élémentaire le long d'une courbe)

La distance élémentaire parcourue le long d'une courbe $\mathscr{C}$ est la norme $\left|\mathrm{d}\overrightarrow{OM}\right|$ du vecteur déplacement élémentaire.

- en cartésiennes : $\left|\mathrm{d}x\overrightarrow{e_x}+\mathrm{d}y\overrightarrow{e_y}+\mathrm{d}z\overrightarrow{e_z}\right|$
- en cylindriques : $\left|\mathrm{d}r\overrightarrow{e_r}+r\,\mathrm{d}\theta\overrightarrow{e_\theta}+\mathrm{d}z\overrightarrow{e_z}\right|$
- en sphériques : $\left|\mathrm{d}r\overrightarrow{e_r}+r\,\mathrm{d}\tau\overrightarrow{e_\theta}+r\sin(\varphi)\overrightarrow{e_\varphi}\right|$
- à l'aide de la vitesse : $v\,\mathrm{d}t$

Abscisse curviligne

- on attache une ficelle au départ
- on déroule du câble : la longueur déroulée est l'abscisse curviligne

Définition (Abscisse curviligne)

L'abscisse curviligne s le long d'une courbe $\mathscr{C}$ est la longueur de l'arc parcouru depuis un point origine O, dans un sens donné. On a :

- $s(O) = 0$
- en tout point M :
  - $\mathrm{d}s = \left|\mathrm{d}\overrightarrow{OM}\right| = v\,\mathrm{d}t$ si le déplacement est dans le positif choisi
  - $\mathrm{d}s = -\left|\mathrm{d}\overrightarrow{OM}\right| = -v\,\mathrm{d}t$ sinon
  - $s(M) = s(O) + \int_O^M \mathrm{d}s$

Abscisse curviligne

Définition (Abscisse curviligne)

L'abscisse curviligne s le long d'une courbe $\mathscr{C}$ est la longueur de l'arc parcouru depuis un point origine O, dans un sens donné. On a :

- $s(O) = 0$
- en tout point M :
  - $\mathrm{d}s = \left|\mathrm{d}\overrightarrow{OM}\right| = v\,\mathrm{d}t$ si le déplacement est dans le positif choisi
  - $\mathrm{d}s = -\left|\mathrm{d}\overrightarrow{OM}\right| = -v\,\mathrm{d}t$ sinon
  - $s(M) = s(O) + \int_O^M \mathrm{d}s$

- une échelle le long d'un mur
- le long d'un cercle (en cartésien et en polaire)

Base locale

- mouvement le long d'une courbe fixe imposée par un guidage (route, piste, montagnes russes)
- repérage par rapport :
  - aux coordonnées cartésiennes : est, ouest, nord, sud
  - ou à la direction instantanée : devant, derrière, gauche, droite
- on veut exprimer vecteurs vitesse et accélération selon ces directions
- on se limite aux courbes planes

Base locale

Définition (Repère de Frenet)

Soit un point M en mouvement le long courbe plane $\mathscr{C}$, et munie d'une abscisse curviligne s orientée. On définit les vecteurs unitaires :

- tangentiel $\vec{T} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}s}$
- normal $\vec{N}$: la rotation de $\vec{T}$ dans le sens direct.

Base locale

Définition (Repère de Frenet)

Soit un point M en mouvement le long courbe plane $\mathscr{C}$, et munie d'une abscisse curviligne s orientée. On définit les vecteurs unitaires :

- tangentiel $\vec{T} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}s}$
- normal $\vec{N}$: la rotation de $\vec{T}$ dans le sens direct.

- la courbe doit être fixe dans le référentiel $\mathscr{R}$ où on étudie le mouvement, « tracée sur un solide »
- $\vec{T}$ dans le sens de croissance de s, unitaire par définition
- $\vec{N}$ « à gauche » quand on regarde dans le sens de croissance de s, unitaire par définition
- base équivalente à $(\vec{e_x}, \vec{e_y})$ ou $\vec{e_r}, \vec{e_\theta}$ pour exprimer vitesse et accélération

Vitesse

Vitesse dans le repère de Frenet

Le vecteur vitesse a pour expression dans le repère de Frenet

$$\overrightarrow{v_R}(M) = v_T\,\overrightarrow{T}$$

Vitesse

Vitesse dans le repère de Frenet

Le vecteur vitesse a pour expression dans le repère de Frenet

$$\vec{v_R}(M) = v_T\,\vec{T}$$

- v_T est la composante de $\vec{v}$ dans le sens choisi pour orienter la courbe
- pour une même courbe, $\vec{T}$ reste le même quelle que soit la vitesse à laquelle on la parcourt

Dérivation des vecteurs du repère de Frenet

comme $\vec{e_r}$ et $\vec{e}_\theta$:

- $\vec{T}$ et $\vec{N}$ sont mobiles
- leurs dérivées leur sont :

Dérivation des vecteurs du repère de Frenet

comme $\vec{e_r}$ et $\vec{e}_\theta$:

- $\vec{T}$ et $\vec{N}$ sont mobiles
- leurs dérivées leur sont :

Dérivation des vecteurs du repère de Frenet

comme $\vec{e_r}$ et $\vec{e}_\theta$:

- $\vec{T}$ et $\vec{N}$ sont mobiles
- leurs dérivées leur sont : orthogonales

Définition (Courbure d'un arc)

En chaque point M d'une courbe $\mathscr{C}$ paramétrée par une abscisse curviligne $s(M)$, on peut définir une courbure algébrique $\gamma(M)$ telle que :

- $\dfrac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}t} = \gamma\vec{N}$
- $\dfrac{\mathrm{d}\vec{N}}{\mathrm{d}t} = -\gamma\vec{T}$

Dérivation des vecteurs du repère de Frenet

Définition (Courbure d'un arc)

En chaque point M d'une courbe $\mathscr{C}$ paramétrée par une abscisse curviligne $s(M)$, on peut définir une courbure algébrique $\gamma(M)$ telle que :

- $\dfrac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}t} = \gamma\vec{N}$
- $\dfrac{\mathrm{d}\vec{N}}{\mathrm{d}t} = -\gamma\vec{T}$

- $\gamma \gtrless 0$ est algébrique : positive si le mouvement tourne en M dans le sens direct
- plus γ est élevé, plus la courbe est courbée…
- γ a la dimension :

Dérivation des vecteurs du repère de Frenet

Définition (Courbure d'un arc)

En chaque point M d'une courbe $\mathscr{C}$ paramétrée par une abscisse curviligne $s(M)$, on peut définir une courbure algébrique $\gamma(M)$ telle que :

- $\dfrac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}t} = \gamma\vec{N}$
- $\dfrac{\mathrm{d}\vec{N}}{\mathrm{d}t} = -\gamma\vec{T}$

- $\gamma \gtrless 0$ est algébrique : positive si le mouvement tourne en M dans le sens direct
- plus γ est élevé, plus la courbe est courbée…
- γ a la dimension :

Dérivation des vecteurs du repère de Frenet

Définition (Courbure d'un arc)

En chaque point M d'une courbe $\mathscr{C}$ paramétrée par une abscisse curviligne $s(M)$, on peut définir une courbure algébrique $\gamma(M)$ telle que :

- $\dfrac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}t} = \gamma\vec{N}$
- $\dfrac{\mathrm{d}\vec{N}}{\mathrm{d}t} = -\gamma\vec{T}$

- $\gamma \gtrless 0$ est algébrique : positive si le mouvement tourne en M dans le sens direct
- plus γ est élevé, plus la courbe est courbée…
- γ a la dimension :de l'inverse d'une longueur

Rayon de courbure et cercle osculateur

Rayon de courbure et cercle osculateur

- pour un mouvement circulaire de rayon R_0, on a $\gamma = 1/R_0$ dans le sens direct, $\gamma = -1/R_0$ dans le sens indirect

Rayon de courbure et cercle osculateur

- pour un mouvement circulaire de rayon R_0, on a $\gamma = 1/R_0$ dans le sens direct, $\gamma = -1/R_0$ dans le sens indirect
- en tout point on peut tracer une infinité de cercles tangents, l'un « embrasse » mieux la courbe

Rayon de courbure et cercle osculateur

Définition (Rayon de courbure algébrique et cercle osculateur)

On définit, en tout point M d'une courbe :

- le rayon de courbure algébrique $R(M) = 1/\gamma(M)$
- le cercle osculateur en M :
  - de rayon $R(M)$
  - de centre O_M tel que $vectMO_M = R(M)\overrightarrow{N}$

Rayon de courbure et cercle osculateur

Définition (Rayon de courbure algébrique et cercle osculateur)

On définit, en tout point M d'une courbe :

- le rayon de courbure algébrique $R(M) = 1/\gamma(M)$
- le cercle osculateur en M :
  - de rayon $R(M)$
  - de centre O_M tel que $vectMO_M = R(M)\overrightarrow{N}$

- $\gamma > 0$ correspond à un cercle osculateur « à gauche »
- $|R(M)|$ est le rayon pour d'un mouvement circulaire
- pour un mouvement rectiligne :

Rayon de courbure et cercle osculateur

Définition (Rayon de courbure algébrique et cercle osculateur)

On définit, en tout point M d'une courbe :

- le rayon de courbure algébrique $R(M) = 1/\gamma(M)$
- le cercle osculateur en M :
  - de rayon $R(M)$
  - de centre O_M tel que $vectMO_M = R(M)\overrightarrow{N}$

- $\gamma > 0$ correspond à un cercle osculateur « à gauche »
- $|R(M)|$ est le rayon pour d'un mouvement circulaire
- pour un mouvement rectiligne :

Rayon de courbure et cercle osculateur

Définition (Rayon de courbure algébrique et cercle osculateur)

On définit, en tout point M d'une courbe :

- le rayon de courbure algébrique $R(M) = 1/\gamma(M)$
- le cercle osculateur en M :
  - de rayon $R(M)$
  - de centre O_M tel que $vectMO_M = R(M)\overrightarrow{N}$

- $\gamma > 0$ correspond à un cercle osculateur « à gauche »
- $|R(M)|$ est le rayon pour d'un mouvement circulaire
- pour un mouvement rectiligne : $R \to \infty$ et $\gamma \to 0$

Accélération

- on accélère en ligne droite : $\vec{a}$

Accélération

- on accélère en ligne droite : $\vec{a}$colinéaire à $\vec{v}$ selon $\vec{T}$
- circulaire uniforme : $\vec{a}$

Accélération

- on accélère en ligne droite : $\vec{a}$ colinéaire à $\vec{v}$ selon $\vec{T}$
- circulaire uniforme : $\vec{a}$ orthogonale à $\vec{v}$ selon $\vec{N}$
- on a dérivé par rapport à s, on doit dériver par rapport à t
- $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} =$

Accélération

- on accélère en ligne droite : $\vec{a}$ colinéaire à $\vec{v}$ selon $\vec{T}$
- circulaire uniforme : $\vec{a}$ orthogonale à $\vec{v}$ selon $\vec{N}$
- on a dérivé par rapport à s, on doit dériver par rapport à t
- $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v_T$

Accélération dans le repère de Frenet

Le vecteur accélération a pour expression dans le repère de Frenet, en un point où la composante de la vitesse selon $\vec{T}$ est v_T et le rayon de courbure algébrique est R :

$$\vec{a_R}(a) = \frac{\mathrm{d}v_T}{\mathrm{d}t}\vec{T} + \frac{v_T^2}{R}\vec{N}.$$

Accélération

- on accélère en ligne droite : $\vec{a}$ colinéaire à $\vec{v}$ selon $\vec{T}$
- circulaire uniforme : $\vec{a}$ orthogonale à $\vec{v}$ selon $\vec{N}$
- on a dérivé par rapport à s, on doit dériver par rapport à t
- $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v_T$

Accélération dans le repère de Frenet

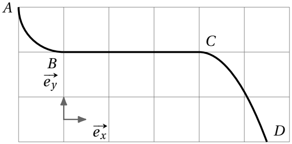
Le vecteur accélération a pour expression dans le repère de Frenet, en un point où la composante de la vitesse selon $\vec{T}$ est v_T et le rayon de courbure algébrique est R :

$$\vec{a}_R(a) = \frac{\mathrm{d}v_T}{\mathrm{d}t}\vec{T} + \frac{v_T^2}{R}\vec{N}.$$

- ☠ $+\frac{v^2}{R}\vec{N}$ en Frenet, $-\frac{v^2}{R}\vec{e}_r$ pour un mouvement circulaire en polaire

Exercice

Un point matériel suit, dans un plan horizontal, la trajectoire représentée sur la figure ci-contre. L'échelle est en m et l'origine du repère cartésien est placée au point C. La portion AB est circulaire de rayon noté R et la portion CD est parabolique.

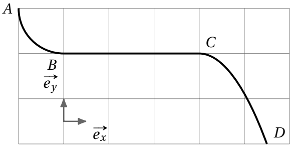


1 a. On note $y = x^2/\ell$ sur la portion parabolique. Déterminer la valeur de ℓ. b. On peut montrer que la courbure γ a pour expression : $\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}$. Calculer γ aux points C et D. c. Tracer le cercle osculateur aux points A, B^-, B^+, C^+ et D.

2 a. Représenter le repère polaire de la portion $A \to B$ en choisissant $\theta = 0$ en A. b. En déduire les coordonnées cartésiennes en tout point de cette portion, quand il est repéré par l'angle θ.

Exercice

Un point matériel suit, dans un plan horizontal, la trajectoire représentée sur la figure ci-contre. L'échelle est en m et l'origine du repère cartésien est placée au point C. La portion AB est circulaire de rayon noté R et la portion CD est parabolique.



3 a. On note s l'abscisse curviligne. Déterminer et tracer $s(x)$ entre les points A et C.
b. Exprimer $s(x)$ sous forme d'une intégrale sur x pour tout point d'abscisse x entre C et D. Établir ou vérifier que :

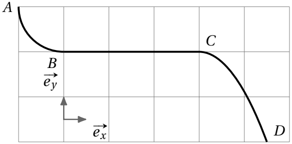
$$s(x) - s(C) = \frac{x\sqrt{1+(2x/\ell)^2}}{2} + \frac{\ell \,\mathrm{argsh}\,(2x/\ell)}{4}$$

Calculer la longueur totale du trajet et vérifier en utilisant une ficelle ou autre.

4 La trajectoire est parcourue par un véhicule déposant de la peinture sur son trajet avec un débit constant. Comment doit varier sa vitesse $v$pour que la répartition de peinture soit uniforme le long du trajet ? Calculer le volume de peinture nécessaire si le débit est $D = 10\,\mathrm{cL \cdot s^{-1}}$ et la vitesse $v = 8\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

Exercice

Un point matériel suit, dans un plan horizontal, la trajectoire représentée sur la figure ci-contre. L'échelle est en m et l'origine du repère cartésien est placée au point C. La portion AB est circulaire de rayon noté R et la portion CD est parabolique.



5 La trajectoire est désormais verticale et correspond à la piste suivie par un·e skieu·r·se. On pose $v = v_0$ en C et on suppose qu'on a par la suite $v^2 - v_0^2 = -2gy$, avec $g = 9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ l'accélération de la pesanteur.

a. Déterminer les expressions des accélérations normales en C et D. Calculer sa valeur en D pour $v_0^2 \ll g|y(D)|$.

b. Que doit valoir l'accélération normale en C pour décoller de la bosse ? En déduire la vitesse minimale en C pour décoller.

c. Quelle est la valeur de l'accélération tangentielle en C ?

Correction

1. a. $\ell = 1{,}125\,\text{m}$ b. $\gamma(D) = -1{,}8\,\text{m}^{-1}$; $R(C) = -56\,\text{cm}$; $\gamma(D) = -7{,}7\cdot 10^{-1}\,\text{m}^{-1}$; $R_C = -13\,\text{m}$.
2. De A à B : $x = -4\cos(\theta)$; $y = R(1-\sin(\theta)$
3. a.
   - de A à B : $s - s(A) = R\theta = \arccos(-x/R)$
   - de B à C : $s - s(B) = x$

   b. $\mathrm{d}s = \sqrt{1+(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2}\,\mathrm{d}x$
   On calcule : $s = R\pi/2 + 3R + 2{,}6R$
4. $(7{,}2\,\text{m}/8\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}) \times 10\,\text{cL}\cdot\text{s}^{-1} = 120\,\text{cL}$
5. a.
$$a_N(C) = \frac{v_0^2}{R(C)} < 0 \quad a_N(C) \simeq \frac{2g|y(D)|}{R_D} = 3{,}0\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$
   b. On aura :
$$\frac{v_0^2}{|R(C)|} = g \to v_0 = \sqrt{|R(C)|g} = 2{,}3\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}.$$
   Cette situation correspond à avoir la parabole de la piste incluse sous la parabole de la chute libre de vitesse initiale v_0 horizontale.

Indispensable

- Les définitions du mètre et la seconde
- Les notions de repère et de référentiel
- Notions sur le cadre de validité de la mécanique newtonienne
- ♡Les expressions de l'accélération et de la vitesse dans les trois systèmes de coordonnées (sauf l'accélération en sphérique...) ainsi que les démonstrations.
- ♡Exemples de mouvements particuliers.
- repère de Frenet, expressions de vitesse et accélération
- les animations sont consultables à l'adresse suivante : http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Cinematique/index.php